GIỚI HẠN BANACH VÀ ỨNG DỤNG TRONG LÝ THUYẾT PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN

BANACH LIMIT AND APPLICATIONS IN DIFFERENCE EQUATION THEORY

HOÀNG VĂN HÙNG
Khoa Cơ sở Cơ bản, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam
Email liên hệ: hunghvkhcb@vimaru.edu.vn

Tóm tắt
Tác giả sử dụng khái niệm giới hạn Banach để chứng minh một số khẳng định trong lý thuyết các phương trình sai phân tuyến tính, đưa ra một số ví dụ áp dụng các khẳng định này.
Từ khóa: *Giới hạn Banach, không gian Banach các dãy số thực bị chặn, phiếm hàm tuyến tính liên tục trên một không gian định chuẩn, Định lý Hahn-Banach, phương trình sai phân tuyến tính, nghiệm bị chặn của một phương trình sai phân.*
Abstract
Using the concept of Banach limit the author proved some assertions in the theory of linear difference equations. Some examples are shown as an application of the proved assertions.
Keywords: *Banach limit, Banach space of bounded real sequences, continuous linear functional over a normed space, Hahn-Banach Theorem, linear difference equation, bounded solution of a difference equation.*

1. Mở đầu

Trong bài báo này ký hiệu **N** chỉ tập hợp các số nguyên dương, **R** chỉ tập hợp các số thực, $\ell^\infty(\mathbf{N})$ chỉ không gian Banach các dãy số thực bị chặn với chuẩn supremum:

$$\|\mathbf{x}\| = \sup\{|x_n| : n \in \mathbf{N}\}$$

nếu: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \ell^\infty(\mathbf{N})$,

ký hiệu c chỉ không gian con đóng các dãy số thực hội tụ của $\ell^\infty(\mathbf{N})$.

Định nghĩa 1: Một phiếm hàm tuyến tính liên tục $\Phi : \ell^\infty(\mathbf{N}) \to \mathbf{R}$ được gọi là một giới hạn Banach trên $\ell^\infty(\mathbf{N})$ nếu Φ có các tính chất sau:

i) Nếu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in c$

thì: $\Phi(\mathbf{x}) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

ii) Nếu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \ell^\infty(\mathbf{N})$

thì: $\liminf x_n \le \Phi(\mathbf{x}) \le \limsup x_n$;

iii) $\|\Phi\| = 1$;

iv) Nếu $S : \ell^\infty(\mathbf{N}) \to \ell^\infty(\mathbf{N})$ là toán tử dịch trái, nghĩa là: $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \ell^\infty(\mathbf{N})$,

$S(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n, ...)$,

trong đó: $y_n = x_{n+1}$ $(\forall n \in \mathbf{N})$,

thì: $\Phi(S\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})$

với mọi $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \ell^\infty(\mathbf{N})$.

Chú ý: Tồn tại nhiều phiếm hàm tuyến tính Φ thỏa mãn Định nghĩa 1.

Sự tồn tại của giới hạn Banach Φ được chứng minh dựa trên Định lý Hahn-Banach về thác triển phiếm hàm tuyến tính liên tục (xem [1] [6] [8]).Trong không gian định chuẩn thực Định lý này được phát biểu như sau:

Định lý Hahn - Banach: Cho X là một không gian định chuẩn thực và Y là một không gian định chuẩn con của X, $f : \mathrm{Y} \to \mathbf{R}$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên Y với chuẩn $\|f\|$. Khi đó tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục $F : \mathrm{X} \to \mathbf{R}$ có tính chất sau:

$F(y) = f(y)$ với mọi $y \in \mathrm{Y}$, $\|F\| = \|f\|$.

(Phiếm hàm F được gọi là một thác triển của phiếm hàm f từ không gian con Y ra toàn bộ không gian X với chuẩn được bảo toàn).

Các nghiên cứu sâu hơn về tính chất của giới hạn Banach cùng các ứng dụng của khái niệm này trong nghiên cứu các ideal toán tử được công bố trong [2-5] và các tài liệu tham khảo được trích dẫn ở đó. Lý thuyết các phương trình sai phân có liên hệ chặt chẽ với lý thuyết dãy, và vì vậy các khái niệm tổng quát về giới hạn dãy như khái niệm giới hạn Banach phải tìm được các ứng dụng trong lý thuyết này. Tuy nhiên, cho đến thời điểm hiện tại tác giả bài báo này chưa phát hiện thấy các công bố liên quan đến ứng dụng khái niệm giới hạn Banach trong lý thuyết phương trình sai phân.

Tương tự như trong lý thuyết các phương trình vi phân, trong lý thuyết phương trình sai phân, ngoài việc tìm nghiệm của các phương trình đã cho người ta còn quan tâm đến các tính chất của nghiệm, chẳng hạn tính bị chặn, tính hội tụ hoặc ổn định của các nghiệm. Việc nghiên cứu tính chất của nghiệm nhiều khi là mối quan tâm hàng đầu của các nhà nghiên cứu, bởi lẽ biểu thức tường minh của nghiệm trong đa số các trường hợp là không thể tìm được.

Trong bài báo này, tác giả nghiên cứu tính chất bị chặn của nghiệm đối với một lớp các phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng cấp tùy ý. Kết quả chính của bài báo được trình bày dưới đây và được chứng minh dựa trên khái niệm giới hạn Banach.

2. Kết quả chính

Định nghĩa 2: Một nghiệm bị chặn của phương trình sai phân cấp k trên **N** dạng:

$$F(x_{n+k},...,x_n,n)=0 \tag{1}$$

là một phần tử $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n,...)\in\ell^\infty(\mathbf{N})$ làm cho phương trình (1) trở thành đồng nhất thức với mọi $n\in\mathbf{N}$.

Định nghĩa 3: Nếu $T:$ X $\to$ X là một ánh xạ từ tập hợp X vào chính nó và k là số nguyên ≥ 2 thì ta ký hiệu hợp lặp của T với chính nó k lần $\underbrace{T\circ...\circ T}_{k}$ là T^k và quy ước

$T^0x=Id(x)=x, T^1x=Tx$ với mọi $x\in$ X.

Nhận xét: Nếu $S:\ell^\infty(\mathbf{N})\to\ell^\infty(\mathbf{N})$ là toán tử dịch trái thì theo Định nghĩa 3, với mọi số nguyên không âm k ta có:

$$S^k\mathbf{x}=(x_{k+1},x_{k+2},...,x_{n+k},...)$$

với mọi $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n,...)\in\ell^\infty(\mathbf{N})$.

Kết quả chính của bài báo này là định lý sau:

Định lý 1: Xét phương trình sai phân tuyến tính cấp k ≥ 1 với hệ số hằng:

$$a_0x_{n+k}+a_1x_{n+k-1}+...+a_kx_n=r(n) \tag{2}$$

trong đó $a_0\neq 0, a_1,...,a_k$ là các hằng số thực, $r(n)$ là một hàm số thực với tập xác định là tập số nguyên dương **N**.

Đặt:

$$A=\sum_{j=0}^{k}a_j,\quad r=(r(1),r(2),...,r(n),...)$$

Khi đó:

a) Nếu $r\in\ell^\infty(\mathbf{N})$ thì với mọi giới hạn Banach Φ trên $\ell^\infty(\mathbf{N})$, mọi nghiệm bị chặn (nếu có) $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ của phương trình (2) phải thỏa mãn:

$$A\Phi(\mathbf{x})=\Phi(r) \tag{3}$$

$$\liminf r(n)\leq A\Phi(\mathbf{x})\leq\limsup r(n) \tag{4}$$

b) Nếu $r\notin\ell^\infty(\mathbf{N})$ thì phương trình (2) không có nghiệm bị chặn;

c) Nếu $A=0$, $r\in\ell^\infty(\mathbf{N})$ và $\limsup r(n)<0$ (hoặc $\liminf r(n)>0$) thì phương trình (2) không có nghiệm bị chặn. Nói riêng, nếu $A=0$, $r\in c$ và $\lim\limits_{n\to\infty} r(n)\neq 0$ thì phương trình (2) không có nghiệm bị chặn.

Chứng minh:

a) Ký hiệu $S:\ell^\infty(\mathbf{N})\to\ell^\infty(\mathbf{N})$ là toán tử dịch trái. Với các ký hiệu đã đưa ra, phương trình (2) có thể viết lại dưới dạng sau:

$$\sum_{j=0}^{k} a_j S^{k-j}\mathbf{x} = r \qquad (5)$$

Nếu Φ là giới hạn Banach trên $\ell^\infty(\mathbf{N})$ thì từ tính chất iv) của Φ ta suy ra $\Phi(S^m\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})$ với mọi số nguyên không âm *m*.

Vì $r \in \ell^\infty(\mathbf{N})$ và Φ là giới hạn Banach nên từ định nghĩa 1 và (5) ta có:

$$\Phi(r) = \Phi(\sum_{j=0}^{k} a_j S^{k-j}\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{k} a_j \Phi(S^{k-j}\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{k} a_j \Phi(\mathbf{x}) = A\Phi(\mathbf{x}).$$

Vậy (3) được chứng minh. Từ tính chất ii) trong Định nghĩa 1 của giới hạn Banach và (3) ta suy ra:

$$\liminf r(n) \le \Phi(r) = A\Phi(\mathbf{x}) \le \limsup r(n).$$

Vậy bất đẳng thức (4) được chứng minh.

b) Bởi vì toán tử dịch trái ***S*** tác động từ $\ell^\infty(\mathbf{N})$ vào $\ell^\infty(\mathbf{N})$ nên nếu $\mathbf{x} \in \ell^\infty(\mathbf{N})$ thì vế trái của (5) là phần tử thuộc $\ell^\infty(\mathbf{N})$. Do đó nếu $r \notin \ell^\infty(\mathbf{N})$ thì đẳng thức (5) không thể xảy ra. Nghĩa là phương trình (2) không thể có nghiệm bị chặn nếu $r \notin \ell^\infty(\mathbf{N})$.

c) Giả sử *A=0*, $r \in \ell^\infty(\mathbf{N})$ và $\limsup r(n) < 0$. Nếu phương trình (2) có nghiệm bị chặn thì tồn tại $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell^\infty(\mathbf{N})$ sao cho đẳng thức (5) đúng. Theo bất đẳng thức (4) của khẳng định a) ta suy ra:

$$0 = A\Phi(\mathbf{x}) \le \limsup r(n) < 0$$

Mâu thuẫn.

Vậy phương trình (2) không thể có nghiệm bị chặn.

Tương tự, nếu *A = 0*, $r \in \ell^\infty(\mathbf{N})$ và $\liminf r(n) > 0$ thì lại sử dụng bất đẳng thức (4) ta suy ra phương trình (2) không thể có nghiệm bị chặn.

Nếu *A = 0*, $r \in c$ và $\lim_{n\to\infty} r(n) \ne 0$

Thì $\liminf r(n) = \limsup r(n) = \alpha \ne 0$.

Vì vậy, chắc chắn phải xảy ra một trong hai khả năng $\limsup r(n) < 0$ hoặc $\liminf r(n) > 0$, theo điều vừa chứng minh phương trình (2) không thể có nghiệm bị chặn.

Hệ quả: Điều kiện cần để dãy tổng riêng của chuỗi số thực $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ bị chặn là:

$$\liminf u_n \le 0 \le \limsup u_n \qquad (6)$$

Chứng minh:

Đặt $S_n = \sum_{j=1}^{n} u_j$ ta có: $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$

Vậy dãy $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính cấp 1 hệ số hằng $x_{n+1} - x_n = r(n)$ với $r(n) = u_{n+1}$. Ta có $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $A = a_0 + a_1 = 1 - 1 = 0$. Nếu dãy $\{r(n) = u_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ không bị chặn thì theo khẳng định b) của Định lý 1 dãy $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ không thể bị chặn.

Nếu dãy $\{r(n) = u_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ bị chặn và (6) không xảy ra thì phải xảy ra một trong hai bất đẳng thức sau:

$$0 < \liminf r(n) = \liminf u_n$$

hoặc $\limsup r(n) = \limsup u_n < 0$

Nhưng khi đó theo khẳng định c) của Định lý 1 nghiệm $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ không thể bị chặn. Vậy (6) là điều kiện cần cho tính bị chặn của dãy tổng riêng $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

3. Ví dụ áp dụng

Áp dụng Định lý 1 và hệ quả của nó ta có thể thu được một số khẳng định trong giải tích toán, đặc biệt là đối với lý thuyết chuỗi và lý thuyết các hàm số thực.

Ví dụ 1: Nếu chuỗi số thực $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ có $\lim_{n\to\infty} u_n = \alpha \neq 0$ thì chuỗi phân kỳ.

Chứng minh:

Bởi vì $\lim_{n\to\infty} u_n = \alpha \neq 0$ thì không thể xảy ra bất đẳng thức (6). Vậy dãy tổng riêng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ không bị chặn, do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

Ví dụ 2:

Dãy tổng riêng của chuỗi số thực $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ không bị chặn nếu xảy ra một trong hai bất đẳng thức sau:

$$\lim\sup(u_{n+1}+3u_n)<0$$

hoặc $\lim\inf(u_{n+1}+3u_n)>0$.

Chứng minh:

Đặt $S_n = \sum_{j=1}^{n} u_j$ ta có:

$$S_{n+2}+2S_{n+1}-3S_n = u_{n+2}+3u_{n+1}.$$

Vậy dãy $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng:

$$x_{n+2}+2x_{n+1}-3x_n = r(n)$$

với $r(n)=u_{n+2}+3u_{n+1}$.

Ta có: $a_0=1,\ a_1=2, a_2=-3$

$$A=a_0+a_1+a_2=1+2-3=0,$$

và xảy ra một trong hai bất đẳng thức sau:

$\lim\sup r(n)=\lim\sup(u_{n+2}+3u_{n+1})<0$ hoặc $\lim\inf\ r(n)=\lim\inf(u_{n+2}+3u_{n+1})>0$.

Áp dụng khẳng định c) của Định lý 1 ta suy ra dãy tổng riêng $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ không thể bị chặn.

Ví dụ 3:

Cho $f(x)$ là hàm thực liên tục và bị chặn trên khoảng $[0,+\infty)$.

Khi đó, với mọi bộ số thực $a_0 \neq 0, a_1,\ldots,a_k$ $(k\geq 1)$ thỏa mãn $\sum_{j=0}^{k} a_j = 0$ và số thực $T>0$, luôn tồn tại một dãy số dương $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sao cho:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

và $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j f(x_n+(k-j)T)=0$.

Chứng minh:

Nếu với mọi số nguyên dương n luôn tìm được một số $x_n \geq n$ sao cho:

$\sum_{j=0}^{k} a_j f(x_n+(k-j)T)=0$ thì dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ chính là dãy cần tìm.

Nếu điều này không xảy ra thì tồn tại một số nguyên dương m sao cho $\sum_{j=0}^{k} a_j f(x+(k-j)T)\neq 0$ với mọi $x\geq m$.

Vì $\sum_{j=0}^{k} a_j f(x+(k-j)T)$ liên tục trên $[m,+\infty)$ nên từ đó suy ra $\sum_{j=0}^{k} a_j f(x+(k-j)T)$ phải giữ nguyên một dấu trên $[m,+\infty)$.

Để xác định ta xem $\sum_{j=0}^{k} a_j f(x+(k-j)T)>0$ với mọi $x\geq m$. Đặt $u_s = f(sT)$ với s nhận giá trị nguyên dương. Khi đó ta có:

$$\sum_{j=0}^{k} a_j f(sT+(k-j)T)=\sum_{j=0}^{k} a_j f((s+k-j)T)=\sum_{j=0}^{k} a_j u_{s+k-j}>0$$

với mọi $s\geq \frac{m}{T}$.

Do đó: $\liminf \sum_{j=0}^{k} a_j u_{s+k-j} \geq 0$.

Nếu $\liminf \sum_{j=0}^{k} a_j u_{s+k-j} = 0$ thì tồn tại một dãy $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ sao cho:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$$

và $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j u_{s_n+k-j} = 0$.

Vậy ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j f(s_n T + (k-j)T) = 0 \cdot$$

Như thế, dãy $\{x_n = s_n T\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy cần tìm.

Nếu $\liminf \sum_{j=0}^{k} a_j u_{s+k-j} > 0$

thì đặt $r(s) = \sum_{j=0}^{k} a_j u_{s+k-j}$

ta có: $\liminf r(s) > 0$.

Do $\sum_{j=0}^{k} a_j = 0$, áp dụng khẳng định c) của Định lý 1 ta suy ra phương trình sai phân $\sum_{j=0}^{k} a_j z_{s+k-j} = r(s)$ (*) không thể có nghiệm bị chặn. Nhưng điều này dẫn tới mâu thuẫn, vì rõ ràng dãy $\{u_s = f(sT)\}_{s=1}^{\infty}$ là một nghiệm bị chặn của phương trình (*). Mâu thuẫn này chứng tỏ không thể xảy ra khả năng $\liminf \sum_{j=0}^{k} a_j u_{s+k-j} > 0$. Vậy khẳng định của mệnh đề được chứng minh.

Mệnh đề phát biểu trong Ví dụ 3 là tổng quát hóa của bài toán dưới đây (xem [7] bài toán 752):

Cho $f(x)$ là hàm thực liên tục và bị chặn trên khoảng $[x_0, +\infty)$. Chứng minh rằng với mọi số thực T luôn tìm được một dãy số thực $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sao cho:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

và $\lim_{n\to\infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0$.

Thực vậy, nếu cần thay $f(x)$ bởi hàm $g(x) = f(x + x_0)$ ta có thể xem $x_0 = 0$.

Nếu $T = 0$ thì khẳng định của bài toán là tầm thường.

Nếu $T < 0$ thì do đẳng thức:

$\lim_{n\to\infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0$ tương đương với đẳng thức $\lim_{n\to\infty} [f(y_n - T) - f(y_n)] = 0$ với $y_n = x_n + T$ nên ta có thể xét bài toán với giả thiết $T > 0$. Như thế bài toán nêu trên là trường hợp riêng của mệnh đề phát biểu trong Ví dụ 3 với $k = 1, a_0 = 1, a_1 = -1$.

Ví dụ 4:

Nếu số thực $\alpha \neq 0$ và bộ số thực $a_0 \neq 0, a_1, ..., a_k$ $(k \geq 1)$ thỏa mãn $\sum_{j=0}^{k} a_j = 0$ thì phương trình hàm $\sum_{j=0}^{k} a_j f^{k-j+1}(x) = \alpha$ không có nghiệm trong lớp các hàm thực bị chặn được xác định trên tập số thực **R**. Ở đây, ký hiệu f^m $(m \geq 1)$ chỉ hợp lặp của ánh xạ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ được định nghĩa trong Định nghĩa 3.

(Như vậy, từ khẳng định được phát biểu trong ví dụ 4 ta có thể kết luận rằng, chẳng hạn, phương trình hàm $f(f(f(x))) - 2020 f(f(x)) + 2019 f(x) = \alpha$ không có nghiệm bị chặn trên **R** nếu $\alpha \neq 0$).

Chứng minh:

Giả sử trái lại rằng tồn tại một hàm thực $f(x)$ xác định và bị chặn trên toàn tập số thực **R** thỏa mãn:

$$\sum_{j=0}^{k} a_j f^{k-j+1}(x) = \alpha \quad \text{với mọi số thực } x \qquad (7)$$

Đặt: $u_0 = 0, u_1 = f(0), u_n = f(u_{n-1}) = f^n(0)$ với mọi $n \geq 1$. Thay trong (7) $x = u_{n-1}$ ta được:

$$\sum_{j=0}^{k} a_j f^{k-j+1}(u_{n-1}) = \alpha \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{k} a_j f^{k-j+1}\left(f^{n-1}(0)\right) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{k} a_j f^{k-j+n}(0) = \alpha$$

Đẳng thức cuối cùng trong dãy đẳng thức trên đúng với mọi số nguyên dương *n* nên ta suy ra dãy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một nghiệm của phương trình sai phân cấp k hệ số hằng $\sum_{j=0}^{k} a_j x_{n+k-j} = \alpha$. Do $f(x)$ là hàm bị chặn trên **R** nên dãy $\{u_n = f^n(0)\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy bị chặn. Nhưng điều này dẫn đến mâu thuẫn, bởi vì theo khẳng định c) của Định lý 1, từ giả thiết $\sum_{j=0}^{k} a_j = 0$ và $\alpha \neq 0$, ta suy ra phương trình sai phân $\sum_{j=0}^{k} a_j x_{n+k-j} = \alpha$ không thể có nghiệm bị chặn. Mâu thuẫn nhận được chứng minh khẳng định của Ví dụ 4.

4. Kết luận

Định lý 1 và các ví dụ áp dụng chứng tỏ khái niệm giới hạn Banach (như là một hệ quả của Định lý Hahn-Banach) thực sự có ích trong việc nghiên cứu tính chất nghiệm của các phương trình sai phân cũng như các vấn đề của lý thuyết chuỗi, lý thuyết các hàm số thực.

Các kết quả của bài báo là sản phẩm của đề tài nghiên cứu cấp Trường năm học 2019-2020: "*Một số ứng dụng của Định lý Hahn-Banach và Định lý Helly trong giải tích lồi*" .

Tác giả chân thành cảm ơn các góp ý mang tính xây dựng của các phản biện ẩn danh và các chỉ dẫn về quy tắc của Ban biên tập tạp chí. Nhờ các góp ý và các chỉ dẫn này mà bài báo đã tốt lên rất nhiều cả về nội dung lẫn hình thức so với bản thảo lần đầu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] S.Banach. Theorie des operations lineares. Monografje Matematyczne. Warsaw, 1932.

[2] Chao You. Advances in almost convergence. Ann. Funct. Anal. Vol.3, No.1, pp.49-66, 2012.

[3] E. M. Semenov, F.A. Sukochev. Invariant Banach limits and applications. Journal of Functional Analysis, Vol. 259, pp.1517-1541, 2010.

[4] E. M. Semenov, F.A. Sukochev, A.S. Usachev. Geometric properties of the set of Banach limits. Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. Vol.78, pp.177-204, 2014.

[5] L. Sucheston. Banach limits. Amer. Math. Monthly, Vol.74, pp.308-311, 1967.

[6] Vittorino Pata, Fixed Point Theorems and Applications, Springer, 2019.

[7] Б.П.Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Издательство "Наука". Москва 1972.

[8] К. Иосида. Функциональный анализ. Издательство "Мир". Москва 1967.

Ngày nhận bài:	07/01/2020
Ngày nhận bản sửa:	06/02/2020
Ngày duyệt đăng:	12/02/2020