## THIẾT KẾ ĐƯỜNG LĂN CỦA HỆ BÁNH RĂNG KHÔNG TRÒN KIỀU HÀNH TINH ĐÁP ỨNG ĐIỀU KIỆN ĐỒNG TRỤC DESIGN OF CENTRODES OF NON-CIRCULAR PLANETARY GEAR TRAIN THAT MEETS CO-AXIAL CONDITIONS NGUYỄN HOÀNG VIỆT

Viện Cơ khí, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam Email liên hệ: vietnh.vck@vimaru.edu.vn

## Tóm tắt

Nghiên cứu trình bày phương pháp thiết kế đường lăn hệ bánh răng không tròn kiểu hành tinh. Mô hình toán, cùng với thuật toán xác định các tham số của đường lăn bánh răng được phân tích và trình bày thông qua các ví dụ làm sáng tỏ các bước thiết kế của phương pháp. Một chương trình tính toán số được viết trên phần mềm Matlab nhằm kiểm chứng tính đúng đắn của lý thuyết. Kết quả cho thấy tính đúng đắn của cơ sở lý thuyết và thuật toán, đồng thời chứng minh cho khả năng ứng dụng của phương pháp được đề xuất trong nghiên cứu và thực tiễn.

**Từ khóa**: Bánh răng không tròn, đường lăn, hệ bánh răng.

#### Abstract

The study presents a method for designing the centrodes of planetary non-circular gear. The mathematical model, together with the algorithm for determining the parameters of the gear centrodes, is analyzed and presented through examples to clarify the method's design steps. A numerical calculation program is written in Matlab software to verify the theory's correctness. The results show the correctness of the theoretical basis and algorithm and demonstrate the proposed method's applicability in research and practice.

**Keywords**: Non-circular gear, centrodes, planetary gear.

## 1. Giới thiệu

Được thiết kế và chế tạo với mục đích truyền chuyển động quay giữa hai trục theo một hàm tỷ số truyền xác định, kể từ khi ra đời vào thế kỷ XIV, bánh răng không tròn (BRKT) ngày càng khẳng định vai trò của mình như một phương án thay thế hiệu quả cho các cơ cấu cơ khí truyền thống nhờ kết hợp ưu điểm của bánh răng trụ và cơ cấu cam. Kết hợp với các cơ cấu khác, BRKT có thể thực hiện các chuyển động phức tạp với độ chính xác và hiệu suất rất cao.

Các nghiên cứu về BRKT không chỉ dừng lại ở ứng dụng từng cặp bánh răng riêng lẻ mà còn hướng tới kết hợp các cặp BRKT với nhau và với bánh răng trụ tròn thông thường nhằm tối ưu khả năng hoạt động của thiết bị. Trong đó, hệ BRKT kiểu hành tinh là bộ truyền đạt hiệu suất truyền động cao nhất với thiết kế một hàng và kích thước nhỏ gọn [1], tuy nhiên cho tới nay chưa có một quy trình thiết kế hệ hành tinh với các bánh răng trong hệ đều là BRKT đáp ứng đầy đủ các điều kiện của hệ bánh răng vi sai như: Điều kiện đồng trục, điều kiện lắp, điều kiện ăn khớp đúng,... Nghiên cứu về hệ BRKT kiểu hành tinh có thể chia thành hai hướng tiếp cận chính đó là: (1) Chấp nhận vi phạm điều kiện đồng trục của hệ bánh răng vi sai, trong đó, trục bánh răng trung tâm trong không đồng trục với bánh răng trung tâm ngoài, để thực hiện một chức năng cụ thể [2]; (2) Thiết kế bánh răng hành tinh đặc biệt để đảm bảo điều kiện đồng trục của hệ bánh răng. Hướng tiếp cận thứ hai được các nhà khoa học quan tâm nhiều hơn với các nghiên cứu của Volkov và Lin. Trong khi Volkov [3, 4] đề xuất thiết kế bơm thủy lực sử dụng hệ BRKT kiểu hành tinh với bánh răng hành tinh là bánh răng trụ tròn, thì trong nghiên cứu của mình, Lin [5] sử dụng hoàn toàn BRKT cho hệ bánh răng, trong đó bánh răng hành tinh kép ăn khớp cùng lúc với hai bánh răng trung tâm. Mặc dù đã đề cập đến điều kiên bao của đường lăn ngoài với đường lăn trong, tuy nhiên giống như Volkov, Lin vẫn chưa đưa ra được điều kiện bao cho toàn bộ hệ bánh răng.

Nhận thấy sự cần thiết trong việc thực hiện các nghiên cứu sâu hơn về hệ BRKT kiểu hành tinh, đặc biệt là về đường lăn của hệ bánh răng, bài báo này do đó sẽ phát triển cơ sở lý thuyết và đề xuất thuật toán nhằm thiết kế đường lăn hệ BRKT kiểu hành tinh. Trên cơ sở thuật toán được đề xuất, một môđun được viết trên phần mềm Matlab nhằm kiểm chứng tính đúng đắn của lý thuyết và thuật toán đã đề xuất. 2. Mô hình toán đường lăn hệ bánh răng

2.1. Phương trình đường lăn hệ bánh răng



Hình 1. Đường lăn hệ bánh răng không tròn vi sai

Để thiết lập phương trình đường lăn của hệ bánh răng gọi  $\{\Sigma_{Ci}\}/(i=1,3)$  là đường lăn của bánh răng đối tiếp với bánh răng 2 trong trường hợp ăn khớp ngoài và ăn khớp trong (Hình 1). Khi đó, theo tài liệu [6] đường lăn  $\{\Sigma_{Ci}\}$  được xác định bởi:

$$\begin{cases} r_{i}(\phi_{i}) = A_{2i} + (-1)^{g} r_{2}(\phi_{2}) \\ i_{i2} = \frac{r_{2}(\phi_{2})}{A_{2i} + (-1)^{g} r_{2}(\phi_{2})} \\ \phi_{i}(\phi_{2}) = \int_{0}^{\phi_{i}} \left( \frac{r_{2}(\phi_{2})}{A_{2i} + (-1)^{g} r_{2}(\phi_{2})} \right) d\phi_{2} \end{cases}$$
(1)

Trong đó: g = 0 đối với cặp bánh răng ăn khớp trong và g = 1 với cặp bánh răng ăn khớp ngoài;  $r_2(\phi_2)$  là bán kính cực của bánh răng 2;  $r_i(\phi_i)$  là bán kính cực của bánh răng đối tiếp bánh răng 2;  $\phi_2, \phi_i$  là góc cực của cặp bánh răng (2,i);  $n_i$  là hệ số chu kỳ của bánh răng *i* so với bánh răng 2.  $A_{2i}$  là khoảng cách trục của cặp bánh răng (2,i) được xác định bởi:

$$2\pi = n_i \int_0^{2\pi} \left( \frac{r_2(\phi_2)}{A_{2i} + (-1)^g r_2(\phi_2)} \right) d\phi_2$$
(2)

#### Điều kiện đồng trục của hệ BRKT kiểu vi sai

Không mất tính tổng quát, giả thiết rằng đường lăn bánh răng 2 là đường tròn lệch tâm. Khi đó, khoảng cách trục giữa các bánh răng trong từng cặp bánh răng (1-2) và (2-3) được xác định bởi phương trình (2) với  $r_2(\phi_2) = (R^2 - e^2 \sin^2 \phi_2)^{0.5} - e \cos \phi_2$  [1] là bán kính cực đường lăn {  $\Sigma_{C2}$  } của bánh răng 2; *R* là bán kính đường tròn {  $\Sigma_{C2}$  } và *e* là độ lệch của tâm quay  $O_2$  so với tâm hình học của {  $\Sigma_{C2}$  } (Hình 2).

Khoảng cách trục của cặp bánh răng (1-2), (2-3)

được xác định nhờ phương pháp lặp với giá trị ban đầu được đưa ra bởi Litvin [1]:

$$A_{2i} = R(n_1 + 1)(1 - 0.25(n_1 - 12)(e/R)^2 n_1^{-1})$$
(3)

$$A_{23} = R(n_3 - 1)(1 + 0.25(n_3 - 12)(e/R)^2 n_3^{-1})$$
(4)



Hình 2. Đường lăn bánh răng trụ tròn lệch tâm

Từ phương trình (3, 4), phương trình liên hệ giữa  $A_{12}$  và  $A_{23}$  được xác định thông qua:

$$f(R, e, n_1, n_3) = A_{12}(R, e, n_1) - A_{23}(R, e, n_3)$$
(5)

Với mục đích đảm bảo điều kiện đồng trục của hệ bánh răng vi sai đồng thời  $A_{12}$  và  $A_{23}$  phải bằng một giá trị khoảng cách *A* cho trước, các tham số của phương trình (5) cần thỏa mãn phương trình:

$$f(R, e, n_1, n_3) = \delta A$$

$$\delta A \approx 0$$
Trong đć:  $\delta A$  là sai lậch true cho nhớn
(6)

Trong đó:  $\delta A$  là sai lệch trục cho phép.

Các tham số  $(R, e, n_1, n_3)$  thỏa mãn phương trình (6) không thể được xác định bằng phương pháp giải phương trình thông thường do số ẩn nhiều hơn số phương trình. Để giải quyết vấn đề này, nghiên cứu đề xuất sử dụng thuật toán nhằm tìm các giá trị  $(R, e, n_1, n_3)$  thỏa mãn phương trình (6).

## 2.2. Xác định điều kiện để $\Sigma_3$ bao hệ $\Sigma_1$ , $\Sigma_2$

#### Xác định n3min

Đường lăn của các bánh răng trong hệ là đường cong kín có bán kính cực là hàm tuần hoàn với:

$$r_{2\max} \le r_2(\phi_2) \le r_{2\min}; \Delta r_2 = r_{2\max} - r_{2\min}$$
 (7)

$$r_{3\max} \le r_3(\phi_3) \le r_{3\min}; \ \Delta r_3 = r_{3\max} - r_{3\min}$$
 (8)

Xét cặp BRKT (1 - 2) và cặp BRKT (2 - 3) ta có:

$$A_{12} = r_{2\min} + r_{1\max} = r_{2\max} + r_{1\min} A_{23} = r_{3\min} - r_{2\min} = r_{3\max} - r_{2\max}$$
(9)

Từ Hình 1 thấy rằng:

$$r_{\rm 3min} \ge A_{12} + \Delta r_2 \tag{10}$$

Thay phương trình (7), (8) vào (10), sau khi biến đổi ta có:

$$A_{23} \ge A_{12} + r_{2\max} - 2r_{2\min}$$
 (11)  
Do  $r_2 > 0$ , vì vậy:

### KHOA HỌC - CÔNG NGHỆ

$$A_{23} + r_2(\phi_2) \ge A_{12} + r_{2\max} - 2r_{2\min} + r_2(\phi_2)$$
(12)

Từ (12) ta có:

$$\frac{r_2(\phi_2)}{A_{23} + r_2(\phi_2)} \le \frac{r_2(\phi_2)}{A_{12} + r_{2\max} - 2r_{2\min} + r_2(\phi_2)}$$
(13)

Lấy tích phân hai vế của bất phương trình (13) với  $\phi_2 \in [0 \div 2\pi]$  ta có:

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{r_2(\phi_2)}{A_{23} + r_2(\phi_2)} d\phi_2 \le \int_{0}^{2\pi} \frac{r_2(\phi_2)}{A_{12} + r_{2\max} - 2r_{2\min} + r_2(\phi_2)} d\phi_2 \qquad (14)$$

Kết hợp (14) với (2) ta có:

$$\frac{2\pi}{n_3} \le \int_0^{2\pi} \frac{r_2(\phi_2)}{A_{12} + r_{2\max} - 2r_{2\min} + r_2(\phi_2)} d\phi_2$$
(15)

Biến đổi và rút gọn bất phương trình (15) trở thành:

$$n_{3} \geq \frac{2\pi}{\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{r_{2}(\phi_{2})}{A_{12} + r_{2\max} - 2r_{2\min} + r_{2}(\phi_{2})} d\phi_{2}} = n_{3d}$$
(16)

Xác định n<sub>3max</sub>

$$A_{23} < r_{3\max} \le A_{23} + r_{2\max}$$

$$(17)$$

Do 
$$r_3 > 0$$
, vi vậy:  
 $A_{23} + r_3(\phi_3) \le A_{23} + A_{12} - r_{1\min} + r_3(\phi_3)$  (18)

$$\sum_{i=1}^{n} (20) t_{2i} = 25$$

Từ (20) ta có:

$$\frac{r_3(\phi_3)}{A_{23} + r_3(\phi_3)} \ge \frac{r_3(\phi_3)}{A_{23} + A_{12} - r_{1\min} + r_3(\phi_3)}$$
(19)

Tương tự như phần trên, biến đổi và rút gọn bất phương trình (19) trở thành:

$$n_{3} \leq \frac{2\pi}{\int_{0}^{2\pi} \frac{r_{3}(\phi_{3})}{A_{23} + A_{12} - r_{1\min} + r_{3}(\phi_{3})}} = n_{3u}$$
(20)

Bất phương trình (16), (20) cho phép xác định điều kiện để  $\Sigma_3$  bao được hệ  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ .

## 3. Thuật toán xác định tham số đường lăn theo điều kiện đồng trục hệ bánh răng vi sai

## 3.1. Giá trị khởi đầu và gia số

Theo [6], để đường lăn của các BRKT là đường cong kín thì tỷ số truyền của cặp BRKT phải là một hàm tuần hoàn với chu kỳ thỏa mãn:

$$T = \frac{T_1}{n_1} = \frac{T_2}{n_2} = \frac{T_3}{n_3}$$
(21)

Với  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  là chu kỳ tuần hoàn của  $r_1(\phi_1)$ ,  $r_2(\phi_2)$ ,  $r_3(\phi_3)$ ; còn  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  là số nguyên dương.

Từ phương trình (3, 4), nhận thấy để  $A_{12}, A_{23} > 0$ thì  $n_1 > -1, n_3 > 1$ , kết hợp với điều kiện (21) xác định được giá trị khởi đầu và gia số của hệ số chu kỳ:

$$n_1 = 1, \ \Delta n_1 = 1, n_3 = 2, \ \Delta n_3 = 1$$
 (22)

#### 3.2. Điều kiện biên

Các điều kiện biên giới hạn giá trị các tham số được đưa ra nhằm tăng độ chính xác của kết quả thuật toán:

i) Từ phương trình (16), (20) ta có điều kiện biên của hệ số n<sub>3</sub>:

$$n_{3d} \le n_3 \le n_{3u} \tag{23}$$

ii) Từ bất phương trình (11), kết hợp với điều kiện  $A_{12} = A_{23} = A$  ta có:

$$r_{2\max} \le 2r_{2\min} \tag{24}$$

Từ mối quan hệ hình học lại có:

$$r_{2\max} = R + e , \ r_{2\min} = R - e$$
 (25)

Kết hợp phương trình (24, 25) thu được điều kiện biên của độ lệch tâm *e*:

$$0 \le e \le \frac{R}{3} \tag{26}$$

iii) Thay giá trị khởi đầu của  $n_1$ ,  $n_3$  vào phương trình (3, 4), kết hợp với điều kiện (26). Sau khi biến đổi và rút gọn, ta có điều kiện biên của bán kính R:

 $0 < R < 4A \tag{27}$ 

## 3.3. Điều kiện kết thúc thuật toán

Thuật toán sẽ kết thúc quá trình tính toán khi tìm được các giá trị  $(R, e, n_1, n_3)$  thỏa mãn phương trình (6) với sai số lệch trục cho phép  $\delta A$ :

$$\begin{cases} |A - A_{12}| \le \delta_A \\ |A - A_{23}| \le \delta_A \end{cases}$$
(28)

Với giả thiết cho trước khoảng cách trục A của hệ bánh răng, từ phương trình (3, 4) nhận thấy hàm số  $A_{12}(R,e,n_1)$  và  $A_{23}(R,e,n_3)$  đồng biến trên khoảng xác định của  $(R,n_1,n_3)$  và nghịch biến trên khoảng xác định của e. Do đó thuật toán điều chỉnh tăng giá trị A bằng cách tăng giá trị  $(R,n_1,n_3)$ , trong khi để giảm giá trị A thì sẽ tăng giá trị e.

# 3.4. Thuật toán xác định thông số thiết kế đường lăn hệ bánh răng không tròn

Trên cơ sở những phân tích ở trên, nghiên cứu đã phát triển một thuật toán được trình bày trên Hình 3 nhằm xác định bộ thông số thiết kế đường lăn của hệ BRKT đáp ứng điều kiện đồng trục của hệ bánh răng hành tinh.

#### 4. Kết quả và thảo luận

Trong phần trên, nghiên cứu đã trình bày thuật toán xác định đường lăn hệ BRKT kiểu hành tinh. Trên cơ sở đó một chương trình tính toán số trên phần mềm Matlab được phát triển để khảo sát tính đúng đắn



Hình 3. Sơ đồ thuật toán xác định tham số đường lăn hệ bánh răng không tròn kiểu vi sai

của lý thuyết thông qua các ví dụ cụ thể.

bánh răng hành tinh.

Ví dụ 1: Xác định điều kiện  $\Sigma_3$  bao hệ  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ .

Thiết kế đường lăn hệ bánh răng hành tinh với bánh răng vệ tinh 2 là bánh răng tròn lệch tâm với R= 25,00 mm, e = 5,00 mm,  $n_1 = 3$ . Từ bất phương trình (16, 20) xác định được  $n_3 \in [5,9]$ . Đồ thị đường lăn hệ bánh răng kiểu hành tinh ứng với các giá trị  $n_3$  được mô tả như trên Hình 4, 5, 6. Trong đó với giá trị  $n_3 =$ 5 và  $n_3 = 9$  đường lăn  $\Sigma_3$  bao được hệ  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  (Hình 4, 5), trường hợp  $n_3 = 4$  đường lăn  $\Sigma_4$  không bao được hệ  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  (Hình 6).

Từ Hình 4, 5 cho thấy hệ BRKT kiểu hành tinh không đồng trục chỉ có thể hoạt động nếu cần C được cố định tại vị trí song song với trục hoành của đồ thị. Trong trường hợp cần C quay quanh tâm quay  $O_I$  sẽ xảy ra hai trường hợp: a) Giao thoa đường lăn bánh răng hành tinh và bánh răng trung tâm (Hình 4) hoặc b) Đường lăn bánh răng hành tinh và bánh răng trung tâm không tiếp xúc (Hình 5). Nguyên nhân được giải thích là do khoảng cách trục giữa các cặp bánh răng trong hệ không bằng nhau, để khắc phục hạn chế này nhóm nghiên cứu sử dụng thuật toán được trình bày trong Hình 4 để cân bằng khoảng cách trục của hệ





Áp dụng thuật toán hiệu chỉnh thông số thiết kế đường lăn hệ BRKT kiểu hành tinh đáp ứng điều kiện đồng trục. Sau hiệu chỉnh xác định được khoảng cách trục A = 88,45mm với thông số kích thước đường lăn bánh răng hành tinh 2: R = 22,15mm, e = 3,00mm,  $n_1=3$ ,  $n_3=5$ . Đường lăn hệ BRKT sau hiệu chỉnh được

#### KHOA HỌC - CÔNG NGHỆ

mô tả như trên Hình 7 cho thấy kết quả sau hiệu chỉnh đã đáp ứng được điều kiện đồng trục, đường lăn các bánh răng trong hệ luôn duy trì tiếp xúc dù cần C cố định hay di chuyển.







Hình 7. Đường lăn hệ bánh răng sau hiệu chỉnh

### 5. Kết luận

Trong nghiên cứu này, cơ sở lý thuyết và thuật toán xây dựng đường lăn của hệ BRKT kiểu hành tinh đáp ứng điều kiện đồng trục của các bánh răng trung tâm được đề xuất, đây là điểm mới mà chưa một công bố nào đề cập trước đó. Thuật toán được kiểm tra trong trường hợp bánh răng vệ tinh là bánh răng trụ tròn lệch tâm, nhưng hoàn toàn có thể được áp dụng cho các loại BRKT có đường lăn là đường e-líp, ô van hoặc đường cong hỗn hợp. Kết quả nghiên cứu đóng vai trò quan trọng trong thúc đẩy những nghiên cứu sâu rộng hơn về thiết kế, chế tạo và ứng dụng hệ BRKT trong tương lai.

#### Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Hàng hải Việt Nam trong đề tài mã số: **DT24-25.47**.

### <u>TÀI LIỆU THAM KHẢO</u>

- Litvin, F. L., Alfonso Fuentes (2004), Gear Geometry and Applied Theory, Cambridge University Press.
- [2] Nguyễn Hồng Thái, Nguyễn Thành Trung (2020), Tổng hợp đường lăn của hệ bánh răng không tròn kiểu hành tinh, Tạp chí Khoa học và Công nghệ, (Số 140), tr.5-10.
- [3] Volkov, G. Y., Kurasov, D. A., Gorbunov, M. V. (2018), Geometric Synthesis of the Planetary Mechanism for a Rotary Hydraulic Machine, Russian Engineering Research, Vol.38(1), pp.1-6.
- [4] Smirnov, V. V., Volkov, G. Y. (2018), Computation and structural methods to expand feed channels in planetary hydraulic machines, Journal of Physics Conference Series, Vol.1210(1), pp.1-7.
- [5] Lin, C., Xia, X., Li, P. (2018), Geometric design and kinematics analysis of coplanar double internal meshing non-circular planetary gear train, Advances in Mechanical Engineering, Vol.10(12), pp.1-12.
- [6] Litvin, F. L., Alfonso Fuentes-Azna, Ignacio Gonzalez-Perez, Kenichi Hayasaka (2009), *Noncircular Gears Design and Generation*, Cambridge University Press.

| Ngày nhận bài:     | 13/02/2025 |
|--------------------|------------|
| Ngày nhận bản sửa: | 28/02/2025 |
| Ngày duyệt đăng:   | 01/03/2025 |